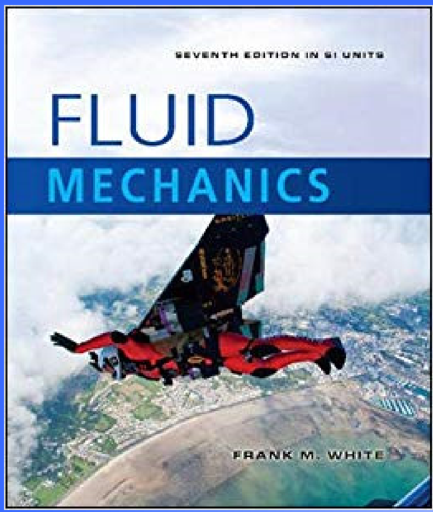


مکانیک سیالات ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

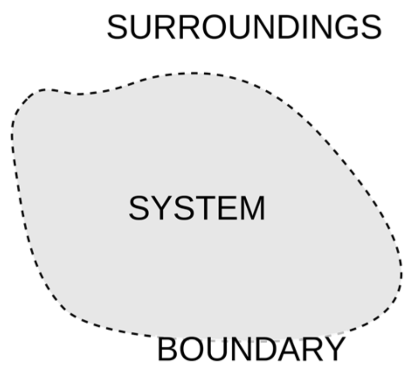
بخش دوم از مباحث فصل چهارم:
معادلات بقا در مکانیک سیالات (معادلات ناویر–استوکس)

کلاس درس دکتر نوروزی
اردیبهشت ۱۴۰۰

سیستم:

مقدار مشخصی از جرم سیستم **(System)** نامیده می شود و هرآنچه بیرون مرز **(Boundary)** آن قرار گرفته، محیط پیرامونی **(Surroundings)** محسوب می شود.

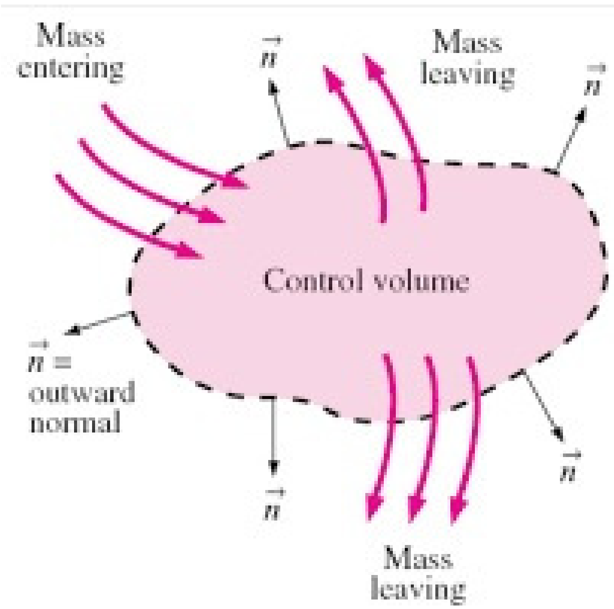
نکته: تمام قوانین فیزیک مکانیک برای سیستم ها نوشته شده اند.



حجم کنترل:

به محدوده مشخصی از فضا حجم کنترل گفته می شود که امکان ورود و خروج جرم به این محدوده وجود دارد. استفاده از حجم کنترل در دیدگاه اویلری رایج است.

نکته: در شکل مقابل، $\vec{n}$ بردار یکه روی سطوح حجم کنترل و به سمت خارج حجم کنترل است.



قوانین مهم در مکانیک سیالات

۱- بقای جرم: مقدار جرم یک سیستم همواره مقداری ثابت است، پس

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{syst} = 0$$

۲- بقای مومنتوم خطی: برآیند نیروهای $(\mathbf{F})$ وارد بر یک سیستم برابر با نرخ تغییرات اندازه حرکت خطی $(m\mathbf{V})$ آن است:

$$\left.\frac{dm\mathbf{V}}{dt}\right|_{syst} = \sum \mathbf{F}$$

۳- بقای مومنتوم زاویه ای: برآیند گشتاورهای $(\mathbf{M})$ وارد بر یک سیستم برابر با نرخ تغییرات اندازه حرکت زاویه ای $(\mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\delta m)$ آن است:

$$\left.\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right|_{syst} = \sum \mathbf{M}$$

۴- بقای انرژی: حرارت داده شده به یک سیستم (Q) و کار انجام شده توسط آن (W)، سبب تغییر انرژی مکانیکی سیستم (E) می شود:

$$\delta Q - \delta W = dE \quad or \quad \dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{syst}$$

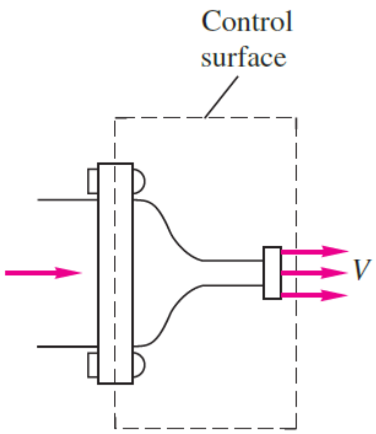
۵- قانون دوم ترمودینامیک:

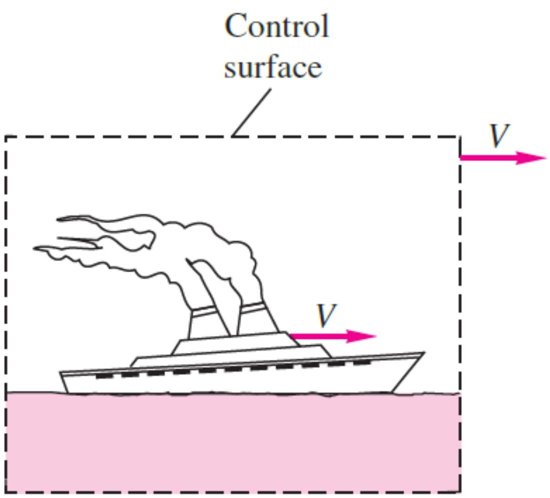
$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad or \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{syst} = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_{gen}$$

قضیه انتقال رینولدز:

در مسائل مکانیک سیالات، قضیه انتقال رینولدز کمک می کند تا قوانین مکانیک بجای سیستم بر حسب حجم کنترل بیان شوند. مطابق این قضیه داریم:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(B_{\text{syst}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{CV}} \beta\rho \, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{CS}} \beta\rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}) \, dA} \qquad (۱)$$





در رابطه فوق، B یک کمیت فیزیکی است که می تواند جرم، مومنتوم خطی، مومنتوم زاویه ای، انرژی و آنتروپی باشد. همچنین ρ چگالی سیال، $\mathbf{V}_r$ سرعت نسبی جریان در سطوح حجم کنترل، CV معرف حجم کنترل و CS معرف سطوح حجم کنترل است. همچنین β محتوای B در واحد جرم است ($\beta = dB/dm$). برای حجم کنترل متحرک، عبارت سرعت نسبی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_s$$

در رابطه فوق $\mathbf{V}$ سرعت جریان در سطوح حجم کنترل و $\mathbf{V}_s$ سرعت حرکت حجم کنترل است. بدیهی است برای حجم کنترل ثابت، ترم سرعت نسبی برابر $\mathbf{V}$ خواهد بود.

یادآوری بسط تیلور

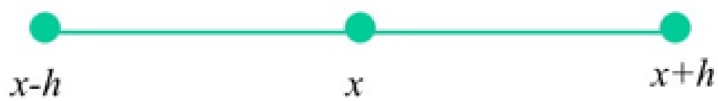

Brook Taylor (1685-1731)

برای توابع پیوسته و مشتق پذیر سری توانی بصورت زیر وجود دارد:

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{[n]}(x)h^{n}$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^{2}+\frac{1}{3!}f'''(x)h^{3}+\dots \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، $f^{[n]}$ معرف مشتق n ام تابع f است.



نکته: چنانچه مقدار h کوچک باشد:

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h \qquad (۳)$$

۱ – صورت دیفرانسیلی قانون بقای جرم

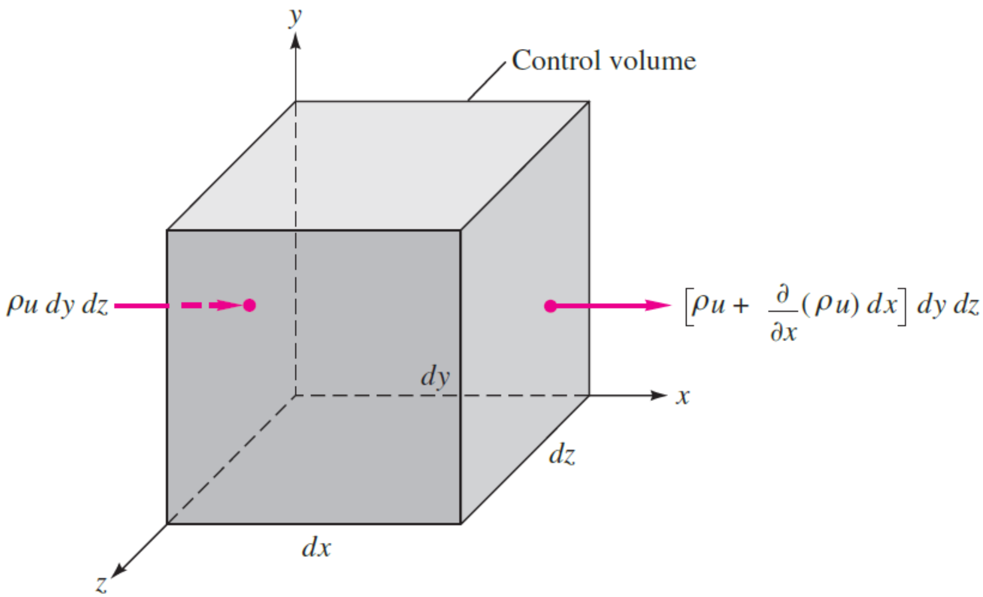
چنانچه در قضیه انتقال رینولدز B را جرم (m) در نظر بگیریم، در اینصورت: $\beta = dB / dm = dm / dm = 1$.

با توجه به قضیه انتقال رینولدز برای جرم داریم:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{out}} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{in}} = 0 \qquad (۴)$$

چنانچه حجم کنترل در ابعاد یک دیفرانسیل حجم باشد، در اینصورت:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz \qquad (۵)$$



Face	Inlet mass flw	Outlet mass flw
x	$\rho u\ dy\ dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, dx\right] dy\ dz$
y	$\rho v\ dx\ dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\, dy\right] dx\ dz$
z	$\rho w\ dx\ dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\, dz\right] dx\ dy$

در شکل مقابل، دبی جرمی ورودی و خروجی به یک حجم کنترل در جهت x نشان داده شده است. مطابق شکل، دبی جرمی ورودی $\dot{m}_{in,x} = \rho u dy dz$ و با توجه به رابطه بسط تیلور (۳)، دبی جرمی خروجی نیز برابر $\dot{m}_{out,x} = (\rho u + (\partial \rho u / \partial x) dx) dy dz$ است. بنابراین اختلاف دبی جرمی ورودی و خروجی در جهت x برابر $(\partial \rho u / \partial x) dx dy dz$ است.

با قرار دادن رابطه (۵) و نیز اختلاف دبی جرمی های خروجی و ورودی در رابطه (۴)، داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\, dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\, dx\, dy\, dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\, dx\, dy\, dz = 0$$

و در نهایت با ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0} \qquad (۶)$$

رابطه فوق، قانون بقای جرم (معادله پیوستگی) برای **جریانهای تراکم پذیر** (چگالی متغیر) است. رابطه فوق با استفاده از عملگر دیورژانس به شکل ساده تری قابل بیان است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \qquad (۷)$$

در اعداد ماخ کمتر از ۰/۳، جریان **تراکم ناپذیر** (مقدار چگالی ثابت) بوده و رابطه پیوستگی به شکل ساده تری قابل بیان است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{یا} \qquad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (۸)$$

۲– صورت دیفرانسیلی قانون بقای مومنتوم

چنانچه در قضیه انتقال رینولدز B را مومنتوم خطی (mV) در نظر بگیریم، در اینصورت: $\beta = d(m\mathbf{V})/dm = \mathbf{V}$.

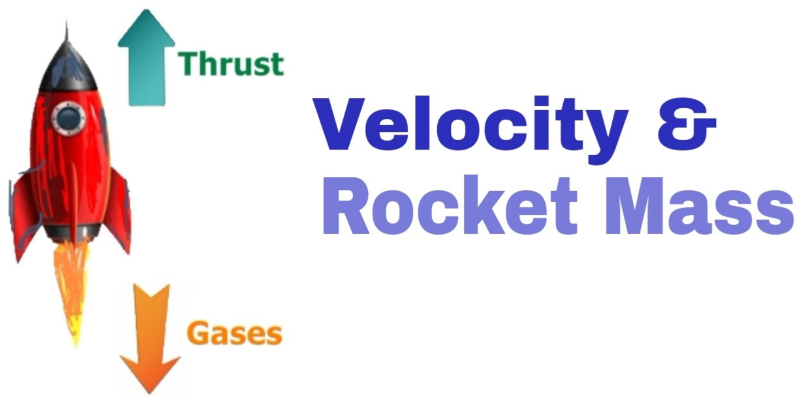
با توجه به قضیه انتقال رینولدز برای مومنتوم داریم:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \mathbf{V}\rho \, d\mathcal{V}\right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{out}} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{in}} \qquad (۱۰)$$

چنانچه حجم کنترل در ابعاد یک دیفرانسیل حجم باشد، در اینصورت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}\rho \, d\mathcal{V}) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) \, dx \, dy \, dz \qquad (۱۱)$$

مقدار مومنتوم ورودی به حجم کنترل در جهت x برابر $Mom_{x,in} = (\rho u \mathbf{V})dydz$ است. با توجه به رابطه بسط تیلور (۳)، مومنتوم خروجی نیز برابر $Mom_{x,out} = (\rho u \mathbf{V} + (\partial \rho u \mathbf{V} / \partial x)dx)dydz$ خواهد بود. بنابراین اختلاف مومنتوم ورودی و خروجی از حجم کنترل در جهت x برابر $(\partial \rho u \mathbf{V} / \partial x)dxdydz$ است. سایر مقادیر مومنتوم در جدول مقابل آمده است.



Faces	Inlet momentum flx	Outlet momentum flx
x	$\rho u \mathbf{V} \; dy \, dz$	$\left[\rho u \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) \, dx\right] dy \, dz$
y	$\rho v \mathbf{V} \; dx \, dz$	$\left[\rho v \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) \, dy\right] dx \, dz$
z	$\rho w \mathbf{V} \; dx \, dy$	$\left[\rho w \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V}) \, dz\right] dx \, dy$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: لذا با قرار دادن رابطه (۱۱) و نیز اختلاف مومنتومهای خروجی و ورودی در رابطه (۱۰) داریم:

$$\sum \mathbf{F} = dx\,dy\,dz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V})\right] \qquad (۱۲)$$

که در رابطه (۱۲)، عبارت سمت راست به شکل زیر نیز قابل بیان است:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V})\\ &= \mathbf{V}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V})\right] + \rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right)\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳)، اولین عبارت سمت راست که داخل براکت قرار دارد، همان معادله پیوستگی (رابطه (۷)) بوده و برابر صفر است.
لذا برای دومین عبارت سمت راست این معادله داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}.\nabla\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{Du}{Dt}i + \frac{Dv}{Dt}j + \frac{Dw}{Dt}k \qquad (۱۴)$$

بنابراین معادله مومنتوم (رابطه (۱۰)) به شکل زیر قابل بیان است:

$$\sum \mathbf{F} = \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}dxdydz \qquad (۱۵)$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: حال بایستی که مجموع نیروها در سمت چپ معادله (۱۵) محاسبه شوند. در مکانیک سیالات نیروها به دو دسته نیروهای حجمی و نیروهای سطحی تقسیم می شوند. نیروهای حجمی، نیروهایی هستند که به کل اجزا توده سیال اعمال می شوند، نظیر نیروی گرانش، نیروی مغناطیسی (در خصوص سیالات فرومغناطیس)، نیروی جاذبه و دافعه الکتریکی (در خصوص سیالات حاوی الکترولیت و ذرات باردار) و نظایر آن. در این درس فقط اثر نیروی گرانش مد نظر است و برای آن داریم:

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho \mathbf{g}\, dx\, dy\, dz \qquad (۱۶)$$

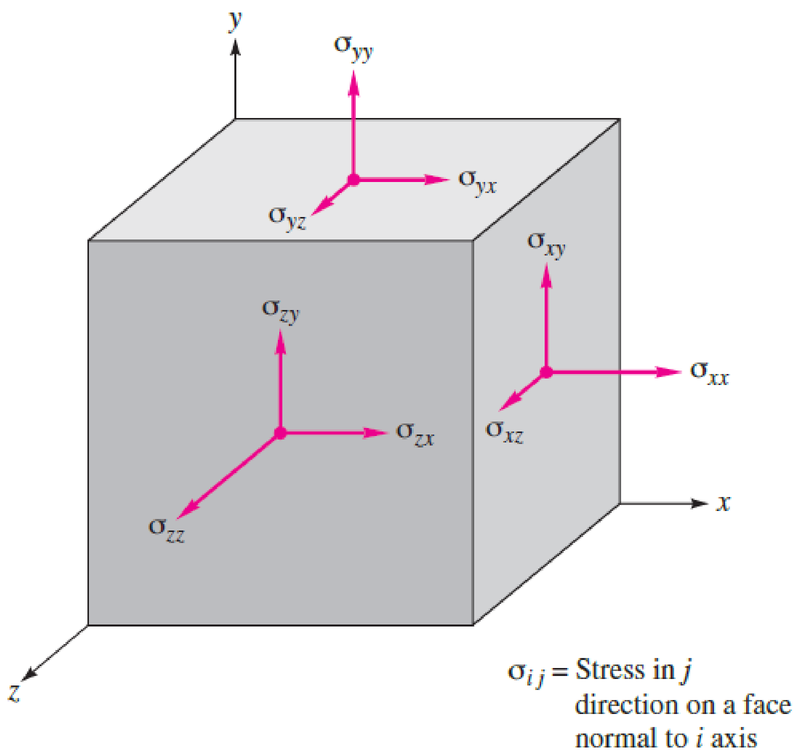
که در رابطه فوق، $\mathbf{g}$ بردار شتاب گرانش و $d\mathbf{F}_{grav}$ نیروی گرانش وارد بر حجم کنترل دیفرانسیلی است.

نیروهای سطحی، نیروهایی هستند که به سطوح حجم کنترل سیال وارد می شوند که شامل نیروهای ویسکوز و فشار هستند. می توان با توجه به قانون پاسکال، برآیندی برای تنش برشی ناشی از نیروی ویسکوز و فشار هیدرواستاتیکی به شکل زیر ارائه کرد:

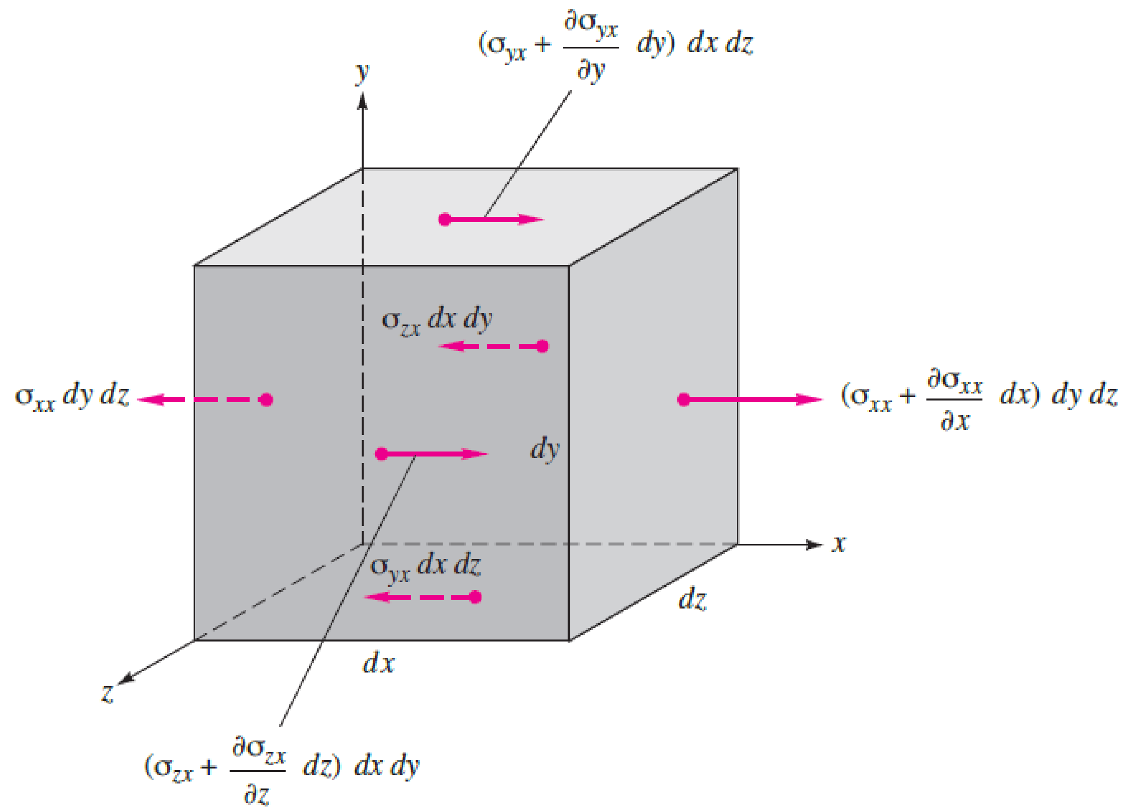
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I} \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\tau}$ میدان تنش برشی ویسکوز، p فشار، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی و $\boldsymbol{\sigma}$ تنش کل است. در اسلاید ۱۲، شکل مولفه های تانسور تنش کل روی یک المان حجم کنترل نشان داده شده است. در نهایت رابطه (۱۷) به شکل زیر قابل بازکردن است:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p+\tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$



Notation for stresses.



Elemental cartesian fixed control volume showing the surface forces in the x direction only.

ادامه اثبات معادله مومنتوم: در تصویر سمت راست اسلاید ۱۲، مولفه هایی از تانسور تنش کل که سبب ایجاد نیرو در جهت x یک جریان می شوند، نشان داده شده است. در اینجا بایستی توجه داشت که به دلیل وجود جریان برشی و گرادیان فشار، مقدار تنش کل روی وجوه مقابل یکدیگر حجم کنترل تغییر کرده و تغییرات بر اساس بسط تیلور (رابطه (۳)) محاسبه شده اند. برآیند نیروهای سطحی در جهت x برابر است، با:

$$dF_{x,\text{surf}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx})\right] dx\, dy\, dz \qquad (۱۹)$$

با قرار دادن مولفه های تنش مربوطه از رابطه (۱۸) در رابطه (۱۹) و تقسیم کردن طرفین به حجم المان $d\mathcal{V} = dx\ dy\ dz$ داریم:

$$\frac{dF_x}{d\mathcal{V}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \qquad (۲۰)$$

به طور مشابه می توان دو مولفه دیگر نیروهای سطحی در جهتهای y و z را بدست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{dF_y}{d\mathcal{V}} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) \\ \frac{dF_z}{d\mathcal{V}} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

روابط (۲۰) و (۲۱) را می توان به شکل زیر نیز بیان کرد:

$$d\mathbf{F}_{surf} = \left(-\nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau}\right) dx dy dz \qquad (۲۲)$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم:

در رابطه (۲۲)، ترم دیورژانس تنش به شکل زیر تعریف می شود:

$$\nabla.\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \tag{۲۳}$$

بنابراین از روابط (۱۶) و (۲۲)، برآیند نیروهای حجمی و سطحی برابر است با:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_{body} + d\mathbf{F}_{surf} = d\mathbf{F}_{grav} + d\mathbf{F}_{surf} = \left(\rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau}\right)dxdydz \tag{۲۴}$$

لذا با قرار دادن رابطه (۲۴) در معادله (۱۵) و تقسیم کردن طرفین به $dxdydz$ داریم:

$$\left(\rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau}\right) = \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \tag{۲۵}$$

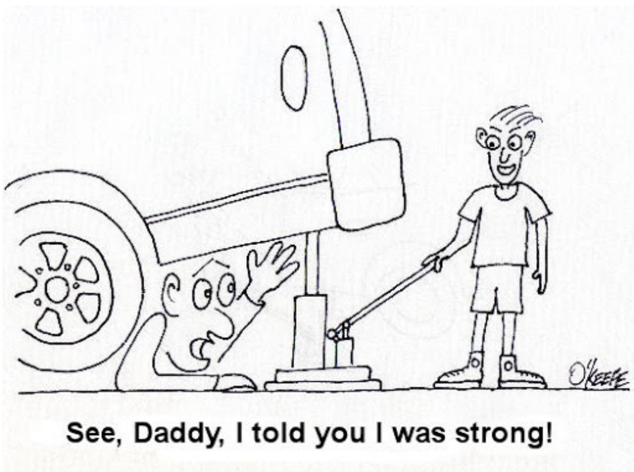
رابطه فوق، معادله مومنتوم برای هر نوع سیال نیوتنی و غیرنیوتنی است و به شکل مقابل نیز قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\
\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: معادله مومنتوم برای جریان تراکم ناپذیر نیوتنی

برای جریان تراکم ناپذیر سیال نیوتنی (Ma<0.3)، تانسور تنش از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\gamma} \qquad (۲۷)$$



در رابطه فوق، μ ویسکوزیته سیال نیوتنی است. همچنین جمله $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ برش جریان است:

$$\dot{\gamma} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

همانطور که پیشتر گفته شد، از معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر (معادله (۸))، دیورژانس سرعت این جریان برابر صفر است $\left(\nabla.\mathbf{V}=0\right)$. لذا برای دیورژانس تنش ویسکوز در رابطه (۲۵) می توان نوشت:

$$\nabla\cdot\tau = \mu\nabla.\dot{\gamma} = \nabla\cdot\left[\mu(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^T)\right] = \mu\left((\nabla^2 u)i + (\nabla^2 v)j + (\nabla^2 w)k\right) =$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial z^2}\right) = \mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (۲۹)$$

اثبات رابطه (۲۹) به سادگی امکان پذیر است. شایان ذکر است که دیورژانس یک تانسور، از رابطه ای نظیر رابطه (۲۳) قابل محاسبه است. برای نمونه برای مولفه x دیورژانس تانسور نرخ برش داریم:

$$\nabla.\dot{\boldsymbol{\gamma}}\Big|_x = \frac{\partial \dot{\gamma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial z} \qquad (۳۰)$$

با قرار دادن ترمهای لازم از رابطه (۲۸) در رابطه (۳۰)، داریم:

$$\begin{aligned}
\nabla.\dot{\boldsymbol{\gamma}}\Big|_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \\
& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \\
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial x}(\nabla.\mathbf{V}) = \nabla^2 u
\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

به طریق مشابه برای مولفه های y و z دیورژانس تانسور نرخ برش داریم:

$$\nabla.\dot{\boldsymbol{\gamma}}\Big|_y = \nabla^2 v \quad \& \quad \nabla.\dot{\boldsymbol{\gamma}}\Big|_z = \nabla^2 w \qquad (۳۲)$$

بنابراین از روابط (۳۱) و (۳۲) نتیجه می شود که $\nabla.\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla^2 \mathbf{V}$ و لذا رابطه (۲۹) اثبات شد.

ادامه اثبات معادله مومنتوم(استخراج روابط نهایی برای جریان تراکم ناپذیر نیوتنی):

در نهایت با قرار دادن روابط (۸) و (۳۱) در معادله (۳۰)، معادله مومنتوم جریان ناپذیر نیوتنی استخراج می شود:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{۳۴}$$

شایان ذکر است که مجموعه معادلات پیوستگی و مومنتوم به **معادلات ناویر-استوکس** معروف هستند. لذا از روابط (۸) و (۳۴)، فرم باز **معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر نیوتنی** به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho \dfrac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{۳۵}$$

معادلات فوق مشتمل بر ۴ معادله و ۴ مجهول u، v، w و p است. به طور کلی در شرایطی که جریان ایزوترمال یا خواص مستقل از دما باشند، حل معادلات فوق (با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی مناسب) برای تعیین میدان سرعت و فشار یک جریان تراکم ناپذیر کفایت می کند.

نکاتی در خصوص معادلات ناویر–استوکس

۱- ماهیت ترمهای بخش مومنتوم این معادله به شرح زیر است (در اینجا رابطه (۳۳) به ρ تقسیم شده است):

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}_{\text{Rate of Change}} + \underbrace{\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V}}_{\text{Advection}}}_{\text{Inertia}} = \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{Body Force}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\text{Pressure Gradient}} + \underbrace{\nu\nabla^2\mathbf{V}}_{\text{Diffusion}}$$

۲- معادلات ناویراستوکس غیرخطی هستند. این غیر خطی بودن از ترمهای انتقال (Advection) معادله مومنتوم ناشی شده است.

۳- در حالت کلی این معادلات فاقد حل صریح تحلیلی جامع هستند و حلهای تحلیلی موجود صرفا برای حالتهای بسیار ساده شده این معادله ارائه شده اند. جوایز ریاضی برای آنالیز این معادله در نظر گرفته شده است. برای نمونه به لینکهای زیر مراجعه کنید:

https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

http://theconversation.com/millennium-prize-the-navier-stokes-existence-and-uniqueness-problem-4244

۴- به دلیل وجود ترم مشتق زمانی و نیز ترمهای غیرخطی، حل عددی این معادله به ازای مقادیر بزرگ نیروی اینرسی (اعداد رینولدز بزرگ) دچار ناپایداری و واگرایی می شود. ضمنا وجود این ترمها برای توصیف جریانهای دارای فیزیک ناپایدار و آشفته ضروری است.

۵- یکی از روشهای رایج برای تحلیل جریانهای آشفته استفاده از فرم متوسط گیری شده زمانی معادلات ناویر–استوکس است.

شکل بی بعد معادلات ناویر–استوکس

چنانچه یک جریان دارای یک طول مرجع L و سرعت مرجع U باشد، در اینصورت پارامترهای جریان را می توان به شکل زیر بی بعد کرد:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}/U \qquad x^* = x/L \qquad y^* = y/L \qquad z^* = z/L$$
$$\nabla^* = L\nabla \qquad t^* = tU/L \qquad p^* = (p - p_0)/(\rho U^2) \tag{۳۵}$$

با توجه به روابط (۳۵) می توان نوشت:

$$\mathbf{V} = U\mathbf{V}^* \qquad x = Lx^* \qquad y = Ly^* \qquad z = Lz^*$$
$$\nabla = \nabla^*/L \qquad t = t^* L/U \qquad p = p_0 + p^* \rho U^2 \tag{۳۶}$$

با توجه به (۳۶)، برای شکل بی بعد معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر داریم (معادله (۸) مربوط به فرم بعددار آن است):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial (Uu^*)}{\partial (Lx^*)} + \frac{\partial (Uv^*)}{(Ly^*)} + \frac{\partial (Uw^*)}{(Lz^*)} = 0$$
$$\frac{U}{L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0 \tag{۳۷}$$

شکل بی بعد معادلات مومنتوم: در خصوص بی بعد سازی معادلات مومنتوم، از معادله مومنتوم در جهت x و با صرفنظر از اثرات گرانش شروع می کنیم:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(t^*L/U)}+(Uu^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)}+(Uv^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Ly^*)}+(Uw^*)\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lz^*)}\right)=$$
$$-\frac{\partial(p_0+p^*\rho U^2)}{\partial(Lx^*)}+\mu\left(\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lx^*)^2}+\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Ly^*)^2}+\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lz^*)^2}\right), \quad (۳۸)$$

$$\frac{\rho U^2}{L}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\rho U^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu U}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right)$$

با تقسیم کردن عبارت قرمز رنگ فوق به $\frac{\rho U^2}{L}$ داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\dfrac{\rho UL}{\mu}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \quad (۳۹)$$

شکل بی بعد معادلات ناویر –استوکس

عبارت آبی رنگ موجود در رابطه (۳۹) همان عدد رینولدز است ($\mathrm{Re} = \rho UL / \mu$). بنابراین برای معادله بی بعد مومنتوم در جهت x داریم:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \quad (۴۰)$$

بطور مشابه برای معادلات مومنتوم بی بعد در جهات y و z داریم:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}\right) \quad (۴۱)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) \quad (۴۲)$$

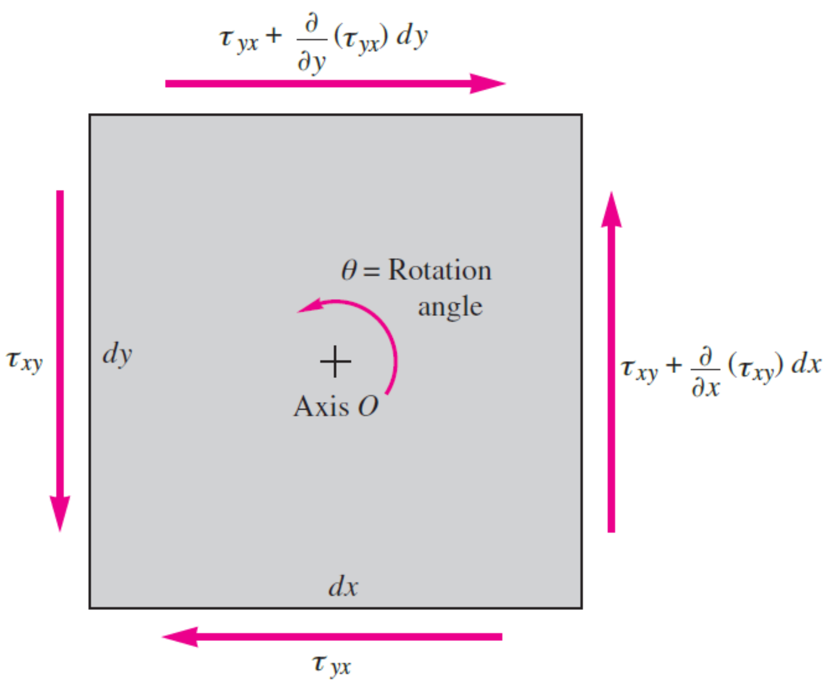
در نهایت از معادلات (۳۷)، (۴۰)، (۴۱) و (۴۲) فرم بسته معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{V}^* = 0$$

$$\frac{D\mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2} \mathbf{V}^* \quad (۴۳)$$

قانون بقای مومنتوم زاویه ای

در شکل مقابل یک المان دیفرانسیلی از سیال نشان داده شده است. از قانون بقای مومنتوم زاویه ای داریم:



$$\sum M_o = I\alpha$$

با محاسبه گشتاورها حول نقطه O المان نشان داده شده، نتیجه می شود:

$$\left[\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})\, dx - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})\, dy\right] dx\, dy\, dz$$
$$= \frac{1}{12}\rho(dx\, dy\, dz)(dx^2 + dy^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

چنانچه طرفین معادله فوق به حجم المان ($dxdydz$) تقسیم شوند، بزرگترین عبارات سمت چپ ترم $\tau_{xy} - \tau_{yx}$ خواهد بود که فاقد هرگونه عبارت دیفرانسیلی است. سایر عبارات باقیمانده دارای دیفرانسیلهای مرتبه اول یا دوم هستند (برای مثال عبارت سمت راست از مرتبه دیفرانسیل به توان ۲ بوده ($dx^2 + dy^2$) و بسیار کوچک است). با آنالیز مرتبه بزرگی معادله فوق و صرفنظر از جملات دارای دیفرانسیل مرتبه اول و دوم در مقابل ترم فاقد دیفرانسیل (یعنی $\tau_{xy} - \tau_{yx}$) داریم: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

با تعمیم نتیجه به سایر تنشها نتیجه می شود که جهت ارضای قانون بقای مومنتوم زاویه ای باید تانسور تنش متقارن باشد:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}$$

معادلات ناویراستوکس جریان تراکم ناپذیر در دستگاه مختصات استوانه ای

Continuity:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

Convective time derivative:

$$\mathbf{V}\cdot\nabla = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Laplacian operator:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

The r-momentum equation:

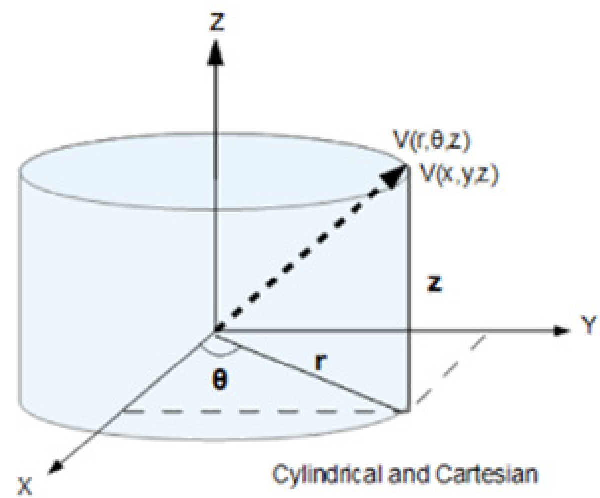
$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_r - \frac{1}{r}v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

The θ-momentum equation:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_\theta + \frac{1}{r}v_r v_\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

The z-momentum equation:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \nu\nabla^2 v_z$$




It will be all worth it in the END